RÉVISION 2

Réactivation 1

Page 92

a. 1) 12 m **2)** 3 m

b. 1) $y_1 = \frac{-3x}{14} + 12$, où x est le temps et y_1, le niveau d'eau dans le réservoir en amont.

2) $y_2 = \frac{x}{6} + 3$, où x est le temps et y_2, le niveau d'eau dans le réservoir en aval.

c. 1) $\frac{75}{7}$ m ou $\approx$ 10,71 m. **2)** 4 m

d. 1) $\frac{-3x}{14} + 12 = \frac{x}{6} + 3 \Rightarrow x \approx 23{,}63$ min **2)** $\approx$ 6,94 m

Réactivation 2

Page 93

a.

Écran	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
Description	**La mesure des bordures est inférieure à 1 dm.**	L'aire des bordures rouges est supérieure d'au moins 35 dm² à l'aire des bordures bleues.	Le périmètre de l'écran, bordures incluses, est au plus de 76 dm.	La somme des aires des bordures rouges et des bordures bleues est inférieure ou égale à l'aire de l'écran.
Inéquation	$x < 1$	$2(24x) \geq 2(9x) + 35$	$\mathbf{2(2x + 8) + 2(2x + 20) \leq 76}$	$144 - 50x \geq 0$

b. Ⓐ $x < 1$ Ⓑ $x \geq \frac{7}{6}$ Ⓒ $x \leq \frac{5}{2}$ Ⓓ $x \leq \frac{72}{25}$

c. 1) Non, car la largeur des bordures a une mesure inférieure à 1 dm.
2) Oui, car la largeur des bordures a une mesure supérieure ou égale à $\frac{7}{6}$ dm ou environ 1,17 dm.

d. 2,5 dm

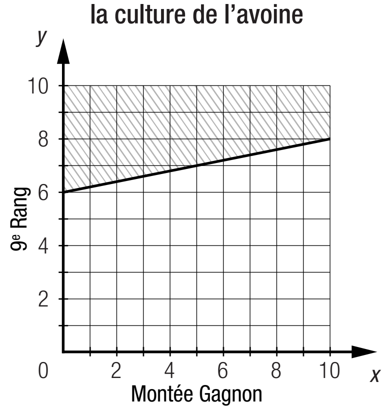
e. Valeur de x : $144 - 50x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2{,}88$
Périmètre maximal : $2(16 + 2 \times 2{,}88) + 2(9 + 2 \times 2{,}88) = 73{,}04$ dm

Réactivation 3

Page 94

a.

Région favorable à la culture de l'avoine



b. $y > -0{,}7x + 7$

c. $(4, 3) : 3 < -\frac{1}{2}(4) + 4{,}5 \Rightarrow 3 < 2{,}5$ (faux).

$(4, 5) : 5 < -\frac{1}{2}(4) + 4{,}5 \Rightarrow 5 < 2{,}5$ (faux).

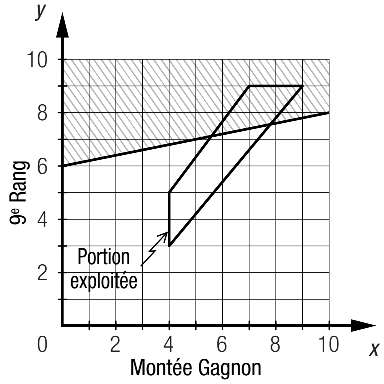
$(7, 9) : 9 < -\frac{1}{2}(7) + 4{,}5 \Rightarrow 9 < 1$ (faux).

$(9, 9) : 9 < -\frac{1}{2}(9) + 4{,}5 \Rightarrow 9 < 0$ (faux).

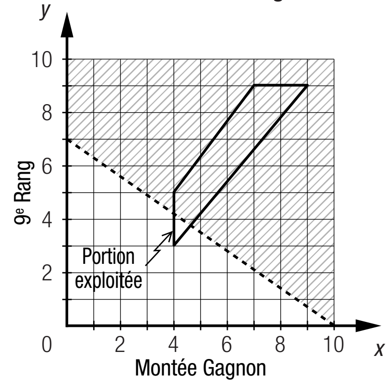
Tous les sommets ont des coordonnées qui ne satisfont pas l'inéquation associée à la culture du blé.

d.

Région favorable à
la culture de l'avoine



Région favorable à
la culture de l'orge



Seule une petite partie de la portion exploitée est favorable à la culture de l'avoine, alors que la majeure partie de la portion exploitée est favorable à la culture de l'orge. L'agriculteur a donc avantage à cultiver de l'orge plutôt que de l'avoine.

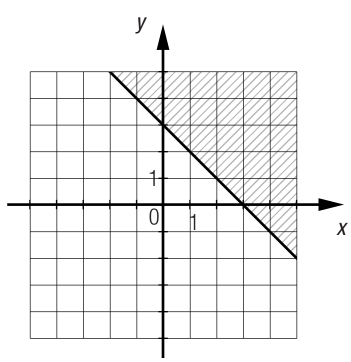
Mise à jour

Page 99

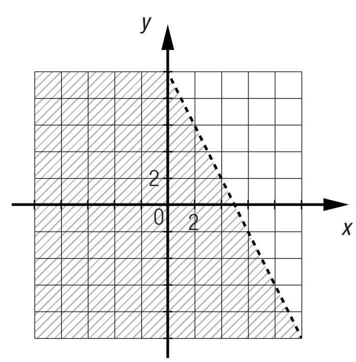
1. a) (–4,5, –11,5) **b)** $\left(\frac{44}{9}, \frac{248}{9}\right)$ **c)** (180, 30) **d)** Aucune solution. **e)** $\left(\frac{510}{31}, -\frac{120}{31}\right)$ **f)** $\left(-\frac{445}{27}, -\frac{718}{27}\right)$

2. a) $x \geq -6$ **b)** $x < 2{,}5$ **c)** $x \geq -4$ **d)** $x > \frac{77}{3}$ **e)** $x \leq \frac{7}{3}$ **f)** $x \geq \frac{4}{3}$

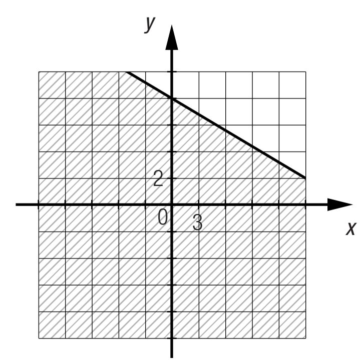
3. a)



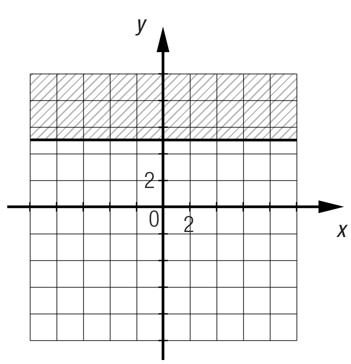
b)



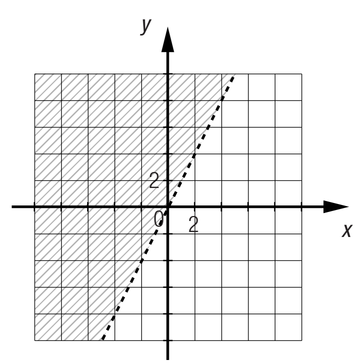
c)



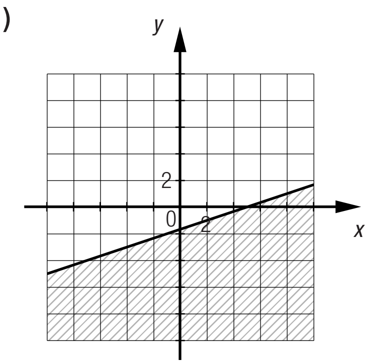
d)



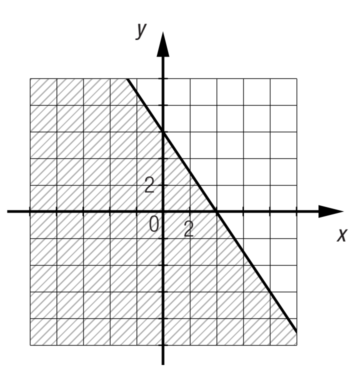
e)



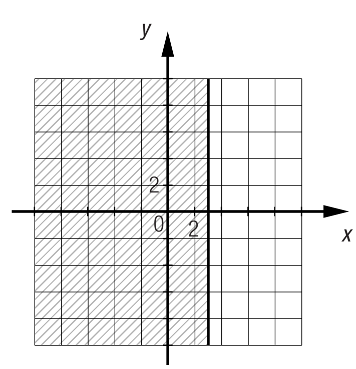
f)



g)



h)

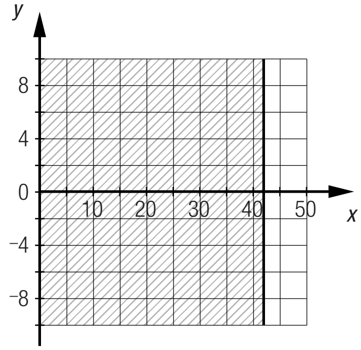


4. A 5, B 1, C 6, D 3, E 2, F 4

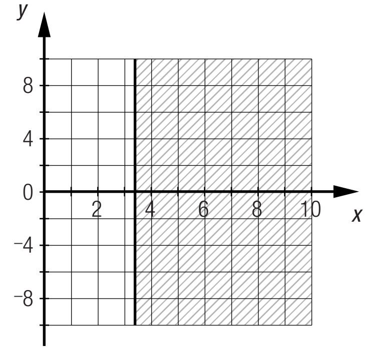
Mise à jour (*suite*) **Page 100**

5. a) $y < -\frac{2}{3}x + 8$ **b)** $y \geq 0{,}5x - 20$ **c)** $y < 3x - 3$ **d)** $y \geq -\frac{4}{3}x - 8$

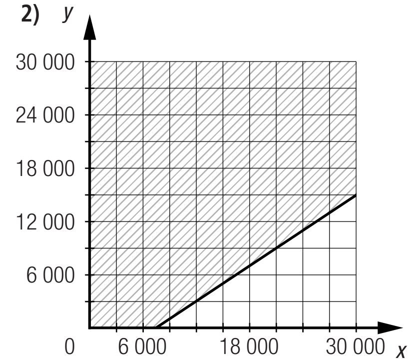
6. a) 1) x : un nombre
$\frac{x}{2} + 6 \leq 27$

2)


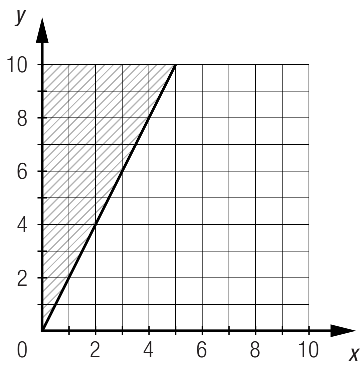
b) 1) x : un nombre
$-2x \leq \frac{2x}{3} - 9$

2)


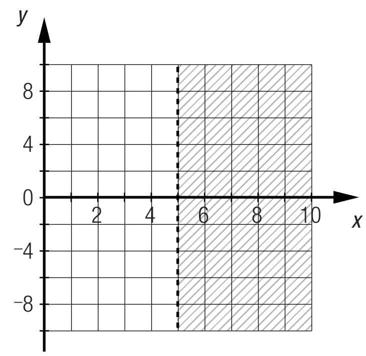
c) 1) x : salaire de Jeanne
y : salaire de Julie
$2x - 3y \leq 15\ 000$

2)


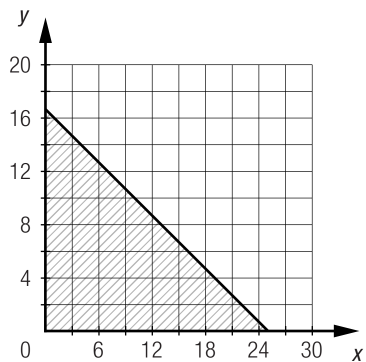
d) 1) x : vitesse d'un piéton
y : vitesse d'un cycliste
$x \leq \frac{y}{2}$

2)


e) 1) x : température ambiante
$2x - 10 > 0$

2)


f) 1) x : nombre de tables à 4 places
y : nombre de tables à 6 places
$4x + 6y \leq 100$

2)


Mise à jour (*suite*) **Page 101**

7. a) 1) x : temps (en s) et y : hauteur (en m) d'un ascenseur. **2)** $y = -0{,}75x + 23$ et $y = 0{,}5x + 2$.
3) Les deux ascenseurs se rencontrent à une hauteur de 10,4 m à 16,8 s.

b) 1) x : temps (en s) et y : température (en °C) d'un liquide. **2)** $y = 0{,}1x + 40$ et $y = 0{,}3x + 20$.
3) Les deux liquides sont à la même température (50 °C) à 100 s.

c) 1) x : temps (en s) et y : distance (en m) parcourue par un mobile. **2)** $y = 8x + 100$ et $y = 10x$.
3) Le second mobile rattrapera le premier en 50 s.

8. a) La mesure de l'angle B est d'au moins 37,5° et inférieure ou égale à 60°.
m $\angle$ B : x
m $\angle$ C : $180 - 120 - x = 60 - x$
$x \geq 30 + \frac{1}{3}(60 - x) \Rightarrow x \geq 37{,}5$

b) La mesure de l'angle B est inférieure à $\frac{300}{7}$° et supérieure à 0°.
$60 - x > \frac{2}{5}x \Rightarrow x < \frac{300}{7}$

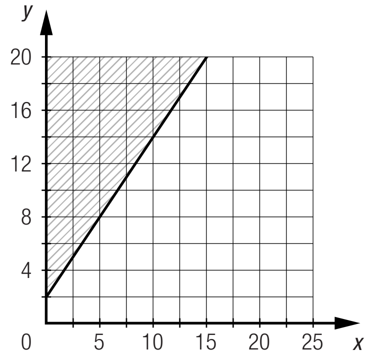
9. a) $36p \geq 384$ et $28p + 72 \leq 476$. **b)** $\left[\frac{32}{3}, \frac{101}{7}\right]$ cm

Mise à jour (*suite*)

Page 102

10. a) $6x \leq 5y - 10$

b)



c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (5, 12), (10, 16) et (2, 8).

11. a) 1) $x^2 + 5^2 \leq 12^2$ **2)** $\sqrt{119}$ dm

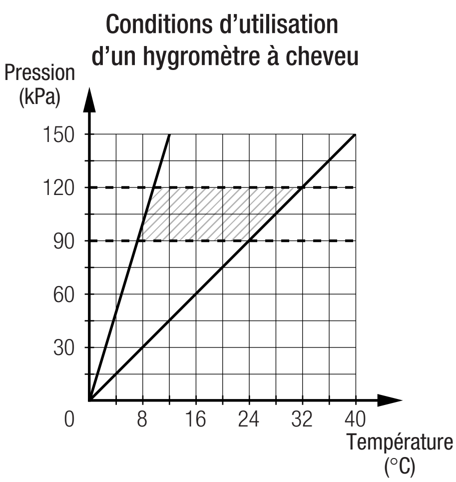
b) 1) Sur la courbe. **2)** Au-dessous de la courbe.

SECTION 2.1 Les systèmes d'inéquations et les polygones de contraintes

Problème

Page 103

P : pression (en kPa)
T : température (en °C)
Inéquations : $P > 90$, $P < 120$, $\frac{P}{T} \geq 3{,}75$ et $\frac{P}{T} \leq 12{,}5$.
Le graphique ci-dessous représente la situation.



Activité 1

Page 104

a. x : nombre d'échantillons de salive y : nombre d'échantillons de sang

b. Graphique ① : $x < \frac{1}{3}y$; graphique ② : $x + y \leq 360$.

c.

	$x < \frac{1}{3}y$	$x + y \leq 360$
A(45, 180)	**Oui**	**Oui**
B(90, 235)	**Non**	**Oui**
C(80, 290)	**Oui**	**Non**
D(135, 235)	**Non**	**Non**

d. **1)** A et D. **2)** C et D. **3)** D **4)** B

e. Non, car le couple (90, 270) ne satisfait pas les deux inéquations à la fois. Ce couple appartient à l'ensemble-solution de l'inéquation $x + y \leq 360$, mais pas à l'ensemble-solution de l'inéquation $x < \frac{1}{3}y$.

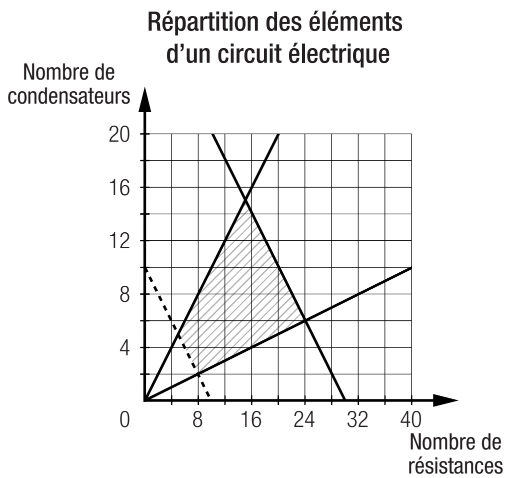
Activité 2

Page 105

a. $x + y > 10$, $x + y \leq 30$, $x \geq y$ et $x \leq 4y$.

b. **1)** On ne peut avoir qu'un nombre positif de résistances.
2) On ne peut avoir qu'un nombre positif de condensateurs.

c.



d. **1)** Oui. **2)** Non.

e. $x \geq 0$, $x + y > 14$, $x + y \leq 28$ et $x \leq y$.

f.
- Le nombre de résistances doit être supérieur ou égal à 0.
- Le nombre de résistances combiné au nombre de condensateurs doit être supérieur à 14.
- Le nombre de résistances combiné au nombre de condensateurs ne peut pas dépasser 28.
- Le nombre de résistances doit être inférieur ou égal au nombre de condensateurs.

g. A(14, 14), B(7, 7), C(0, 14), D(0, 28)

h. Les coordonnées des points A et D font partie de l'ensemble-solution, car elles vérifient chacune des inéquations du système. Les coordonnées des points B et C ne font pas partie de l'ensemble-solution, car elles ne vérifient pas l'inéquation $x + y > 14$.

Technomath

Page 106

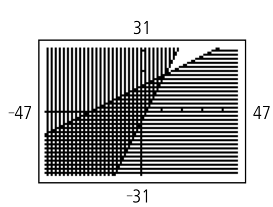
a. **1)** Le demi-plan situé au-dessus de la droite frontière doit être hachuré.
2) Le demi-plan situé au-dessous de la droite frontière doit être hachuré.

b. **1)** $y \geq 1{,}5x + 15$ **2)** $y \leq {}^{-}0{,}3x - 10$

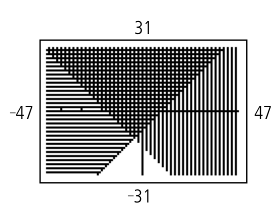
c. $y \geq x$ et $y \geq 30 - x$.

d. **1)** (11, ⁻12) : $y \geq x \Rightarrow {}^{-}12 \geq 11$ (faux) et $y \geq 30 - x \Rightarrow {}^{-}12 \geq 19$ (faux).
2) (15, 26) : $y \geq x \Rightarrow 26 \geq 15$ (vrai) et $y \geq 30 - x \Rightarrow 26 \geq 15$ (vrai).

e. **1)**

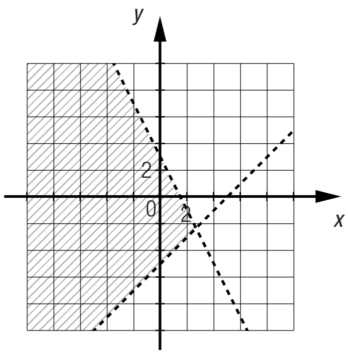


2)

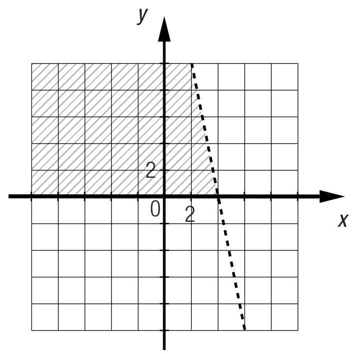


Mise au point 2.1

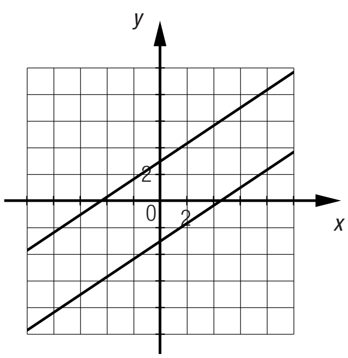
1. a)



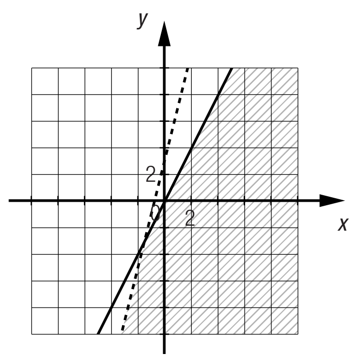
b)



c)



d)

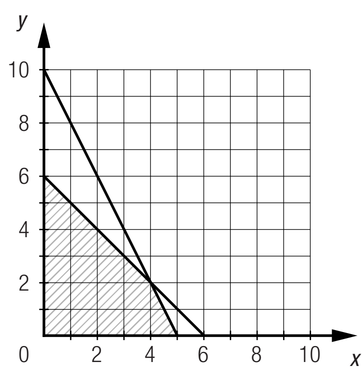


2. a) 1) $y < 2x - 2 \quad y \leq ^{-}0{,}5x - 1$ **2)** $y < 2x - 2 \quad y \geq ^{-}0{,}5x - 1$

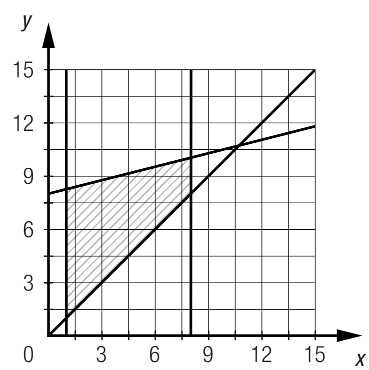
3) $y > 2x - 2 \quad y \geq ^{-}0{,}5x - 1$ **4)** $y > 2x - 2 \quad y \leq ^{-}0{,}5x - 1$

b) Non, car l'une des deux droites est tracée d'un trait en pointillé.

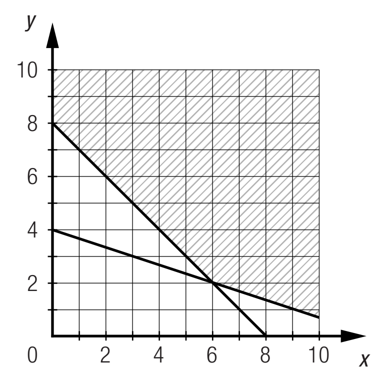
3. a)



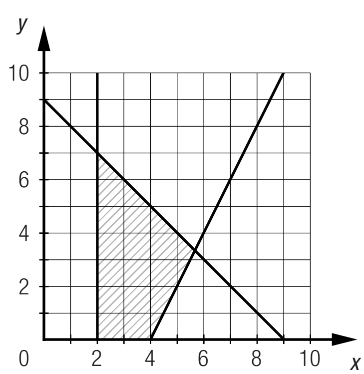
b)



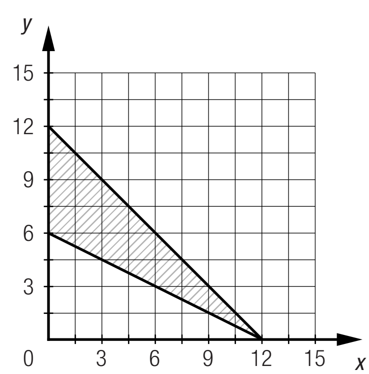
c)



d)



e)



4. a) A, C, E, F **b)** D **c)** B, C, E **d)** B, D

5. a) $x < -5$
$y \geq 6$
$3x + 2y < 18$
$y \geq \frac{-2x}{3} - \frac{20}{3}$

b) $y \geq 6$
$y < 5x - 20$
$y \geq 0{,}8x - 8$

c) $y \leq 0{,}8x - 8$
$y < 5x - 20$
$y \geq \frac{-2x}{3} - \frac{20}{3}$
$3x + 2y < 18$

d) $y \leq 6$
$x > -5$
$y > 5x - 20$
$y \geq \frac{-2x}{3} - \frac{20}{3}$
$3x + 2y < 18$

Mise au point 2.1 (*suite*)

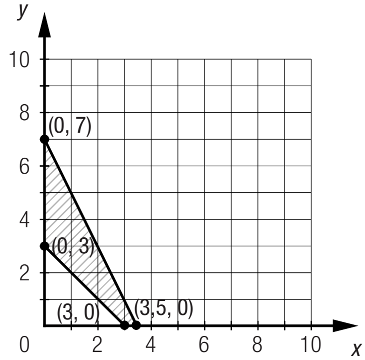
6. a) A(0, 6), B(8, 10), C(20, 0), D(0, 4)

b) A(0, 12), B(3, 15), C(7,5, 15), D$\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$, E(0, 8)

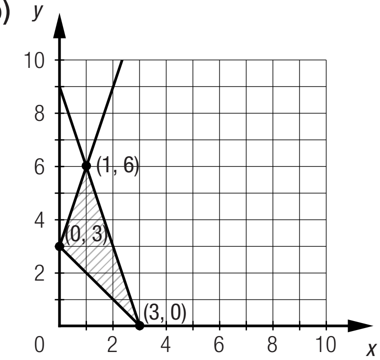
c) A(0, 8), B$\left(\frac{8}{13}, \frac{72}{13}\right)$, C(8, 0)

d) A(0, 2), B(6, 1), C(9, 0), D(0, 0)

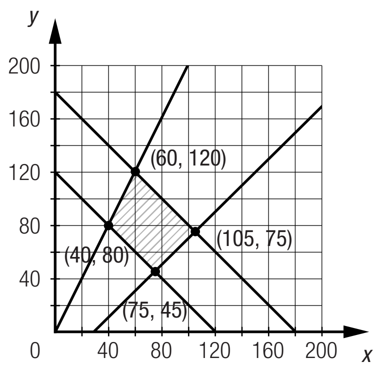
7. a)



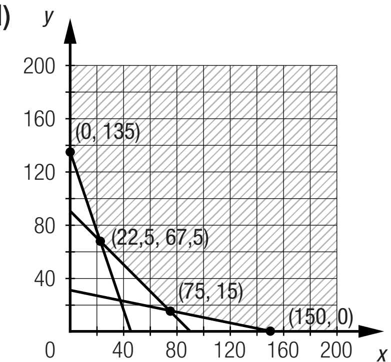
b)



c)



d)



8. a) $x > 0$ et $y \geq 2x$.

b) $y \leq 0$ et $x \leq \frac{y}{3}$.

c) $y > x$ et $y \leq 4x$.

d) $x + y > 0$ et $x + y \leq 12$.

e) $y \geq x + 5$ et $y \leq x + 10$.

Mise au point 2.1 (*suite*)

9. a) $y \leq -x^2$ et $y > -2(0{,}8)^x$.

b) $y \leq 2^x$ et $y > \frac{1}{x}$.

c) $y \leq [x]$ et $y \geq x - 1$.

d) $y \leq |x|$ et $y \geq -|x|$.

10. a) d_1 : 5 d_2 : 4 d_3 : 3 d_4 : 1 d_5 : 2

b) La contrainte 3.

c) 1) Parce qu'elle ne devrait pas compter les solutions associées aux couples (3, 7), (4, 6) et (5, 5), puisque ces solutions ne satisfont pas à la contrainte 1 et que trois des points sont situés sur une droite en pointillé.

2) 21 solutions.

Mise au point 2.1 (*suite*)

Page 112

11. a)

Situation ①	Situation ②
$x \leq \frac{y}{2}$ $x + y \geq 15$ $x + y \leq 26$	$x \leq \frac{y}{2}$ $x + y \geq 15$ $x + y \leq 26$

Les situations sont constituées des mêmes inéquations.

b) 1) Oui, car le point vérifie chacune des inéquations.

2) Non, car le nombre de sapins et le nombre d'érables doivent être entiers.

c) 1) $\mathbb{R}_+$ **2)** $\mathbb{N}$

12. a) A, D **b)** B **c)** C **d)** E

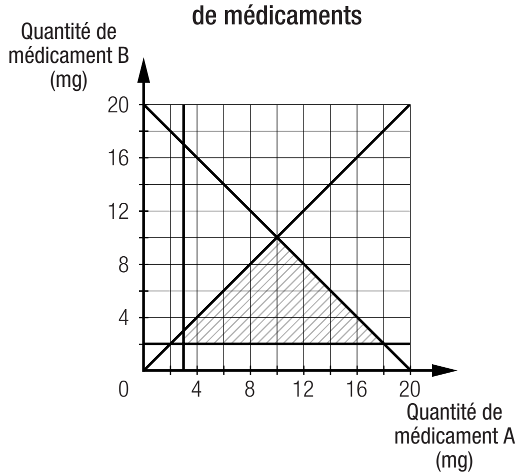
Mise au point 2.1 (*suite*)

Page 113

13. a) 1) x : quantité de médicament A (en mg)
y : quantité de médicament B (en mg)

2) $x \geq 3$
$y \geq 2$
$x + y \leq 20$
$x \geq \frac{x + y}{2}$

3) Répartition de la quantité de médicaments



4) (3, 2), (3, 3), (10, 10) et (18, 2).

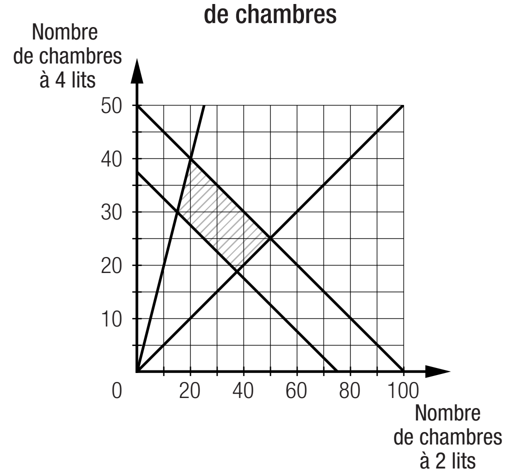
5) Tous les sommets font partie de la région-solution.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (10, 3), (12, 4) et (14, 5).

b) 1) x : nombre de chambres à 2 lits
y : nombre de chambres à 4 lits

2) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + 4y \geq 150$
$2x + 4y \leq 200$
$x \geq \frac{x + y}{3}$
$x \leq \frac{2(x + y)}{3}$

3) Répartition du nombre de chambres

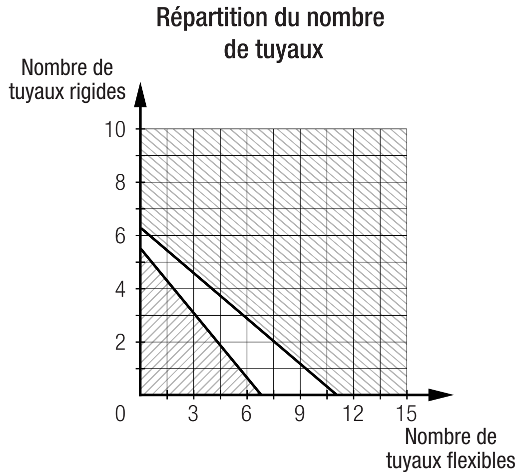


4) (15, 30), (20, 40), (50, 25) et (37,5, 18,75).

5) Seul le sommet (37,5, 18,75) ne fait pas partie de la région-solution, car ses coordonnées ne sont pas entières.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (25, 30), (30, 30) et (40, 25).

14. a)



b) Non. Les deux régions-solutions associées à chacune des contraintes n'ont pas d'intersection.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
L'ensemble des tuyaux installés doit permettre un écoulement minimal de 15 L/min.

15. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (5, 0), (4, 3) et (6, −3). **b)** Aucune solution.

Mise au point 2.1 (*suite*) **Page 114**

16. a) La fréquence cardiaque maximale va de 195 à 215 contractions/min, ce qui correspond à 205 ± 10 contractions/min :
205 = 220 − âge
Âge = 15 ans.

b) 1) Zone Ⓐ : entraînement intensif ; zone Ⓑ : amélioration des capacités cardiovasculaires ; zone Ⓒ : diminution de la masse ; zone Ⓓ : maintien de la condition physique actuelle.

2) $x \geq 195$, $x \leq 215$, $y \geq 0{,}6x$ et $y < 0{,}65x$.

c) De 120 à 129 contractions/min.
Minimum : $0{,}6 \times 200 = 120$ contractions/min (inclus).
Maximum : $0{,}65 \times 200 = 130$ contractions/min (exclu).

SECTION 2.2 Objectif visé et solutions avantageuses

Problème **Page 115**

Plusieurs réponses possibles. Exemple :
Chaque plaque doit avoir une épaisseur de 20 cm et une base dont l'aire est de 10 m^2.
x : épaisseur d'une plaque (en cm)
y : aire de la base d'une plaque (en m^2)

Système d'inéquations :
$x \geq 12$
$x \leq 22$
$y \geq 6$
$y \leq 10$
$\frac{y}{x} \geq 0{,}4$
$\frac{y}{x} \leq 0{,}6$

Après avoir tracé un polygone de contraintes, on cherche un point dont les coordonnées engendrent un format de plaque plus efficace que ceux proposés, par exemple (20, 10).

Activité 1

Page 116

a. 1) $C = 1{,}5x + 0{,}5y$

2) Non, car cette équation ne traduit pas une contrainte à respecter.

b. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$0{,}5x + 3y \geq 15$
$x + y \leq 15$
$y < \frac{2(x + y)}{3}$

c. Calcul du coût d'achat des turbines

Point	Coût (M$)
A(2, 3)	$1{,}5 \times 2 + 0{,}5 \times 3 = 4{,}5$
B(3, 6)	$\mathbf{1{,}5 \times 3 + 0{,}5 \times 6 = 7{,}5}$
C(4, 5)	$\mathbf{1{,}5 \times 4 + 0{,}5 \times 5 = 8{,}5}$
D(5, 10)	$\mathbf{1{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times 10 = 12{,}5}$
E(6, 8)	$\mathbf{1{,}5 \times 6 + 0{,}5 \times 8 = 13}$
F(7, 5)	$\mathbf{1{,}5 \times 7 + 0{,}5 \times 5 = 13}$
G(10, 4)	$\mathbf{1{,}5 \times 10 + 0{,}5 \times 4 = 17}$

d. 1) Les couples A(2, 3), B(3, 6) et D(5, 10), car ils sont associés à des points qui n'appartiennent pas à la région-solution.

2) Le couple G(10, 4), car de tous les couples proposés qui satisfont aux contraintes, c'est celui qui engendre le coût le plus élevé.

3) Le couple C(4, 5), car de tous les couples proposés qui satisfont aux contraintes, c'est celui qui engendre le coût le moins élevé.

Technomath

Page 117

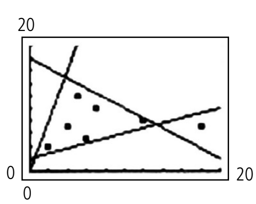
a. $y \geq 0{,}5x$, $y \geq 20 - 3x$ et $y \leq 18 - 0{,}5x$.

b. $5x + 3y$

c. 1) (15, 8)

2) (5, 6)

d. 1)



2) i) Le couple (12, 8).

ii) Le couple (2, 4).

Mise au point 2.2

Page 119

1. a)

Couple	$z = 4x - 2y$
(1, 0)	**4**
(1, 8)	**-12 (minimum)**
(3, 1)	**10**
(3, 3)	**6**
(4, 8)	**0**
(5, 2)	**16 (maximum)**
(8, 10)	**12**

b)

Couple	$z = 7x + 9y$
(2, 2)	**32 (minimum)**
(6, 18)	**204**
(10, 4)	**106**
(12, 12)	**192**
(14, 16)	**242**
(18, 6)	**180**
(20, 12)	**248 (maximum)**

c)

Couple	$z = -1{,}2x + 0{,}4y + 2$
(0, 50)	**22 (maximum)**
(30, 20)	**-26**
(30, 70)	**-6**
(50, 40)	**-42**
(60, 90)	**-34**
(80, 10)	**-90 (minimum)**
(90, 40)	**-90 (minimum)**

Mise au point 2.2 (*suite*)

2. a) 1) x : temps (en min) consacré aux nouvelles du sport
y : temps (en min) consacré aux nouvelles nationales
$x \geq 0$, $y > 20$, $19x > y$, $4x < y$, $y \leq 35$ et $x + y \leq 75$.

2) L'objectif visé est de produire un bulletin d'informations au moindre coût.

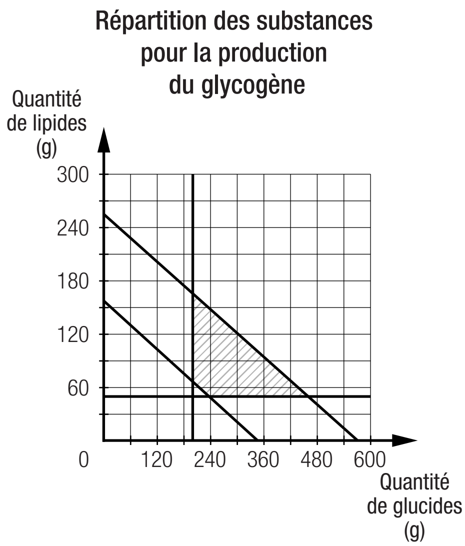
3) $z = 25x + 15y$, où z est le coût de production d'un bulletin d'informations (en $).

b) 1) x : nombre d'avions de type A produits
y : nombre d'avions de type B produits
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $200x + 125y \leq 5000$, $x \geq 5 + 2y$ et $x + y \leq 30$.

2) L'objectif visé est de minimiser le temps de production des avions.

3) $z = 3x + 5y$, où z est le temps de production des avions (en semaines).

3. a)



b) $G = 0{,}04x + 0{,}01y$, où G est la quantité de glycogène (en g), x, la quantité de glucides (en g), et y, la quantité de lipides (en g).

c) 1) La suggestion **D**, pour une production minimale de glycogène de 10,1 g.

2) La suggestion **B**, pour une production maximale de glycogène de 14,5 g.

Mise au point 2.2 (*suite*)

4. a) $C = 150\,000x + 225\,000y$, où C représente les coûts (en $), x, le nombre de presses thermiques, et y, le nombre de presses laser.

b) Le point B, pour des coûts minimaux de 1 725 000 $.

5. a) 1) Le point A. **2)** Le point E.

b) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $z = 2x + 3y$

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $z = x - 4y$

3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $z = x + 2y$

Mise au point 2.2 (*suite*)

6. a) x représente le nombre d'employés à temps plein et y représente le nombre d'employés à temps partiel.

b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
- 5 employés à temps plein et 20 employés à temps partiel.
- 8 employés à temps plein et 12 employés à temps partiel.
- 11 employés à temps plein et 4 employés à temps partiel.

c) Oui. Si l'entreprise compte 1 employé à temps plein et 6 employés à temps partiel.

7. a) 1) $z = 12c + 18s$, où z représente les coûts de production (en $).
2) $r = 20c + 25s$, où r représente les revenus (en $).
3) $p = 8c + 7s$, où p représente les profits (en $).

b) 1) Le point D(100, 125), avec des coûts de production de 3450 $.
2) Le point A(75, 250), avec des revenus de 7750 $.
3) Le point C(150, 175), avec des profits de 2425 $.

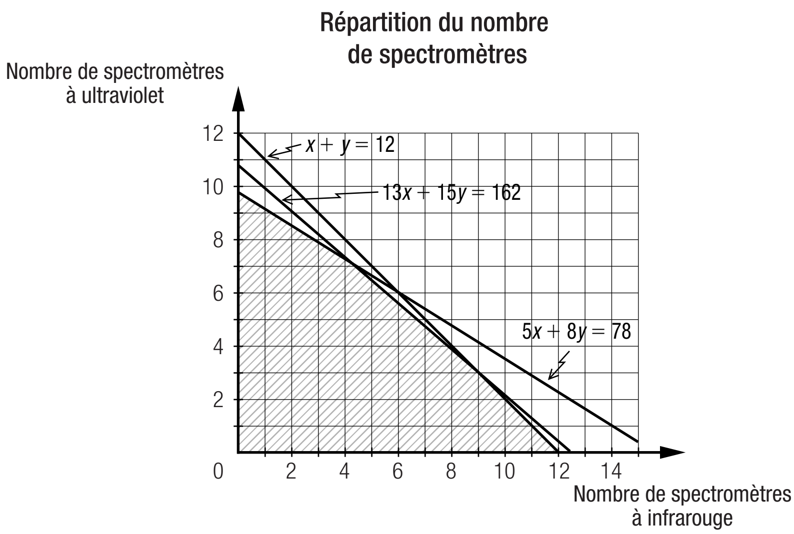
Mise au point 2.2 (*suite*) **Page 123**

8. a) Minimiser la quantité de plastique utilisée pour la fabrication des bouteilles.

b) $z = 150p + 250g$, où z représente la quantité de plastique utilisée (en cm^2).

c) Le couple E(80, 80) constitue la solution la plus avantageuse, avec l'utilisation de 32 000 cm^2 de plastique.

9. a)



b) Non. Seuls les couples de nombres entiers doivent être considérés.

c) $14 \times 6 + 15 \times 5 = 159$ échantillons traités/h.

d) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* 4 spectromètres à infrarouge et 7 spectromètres à ultraviolet.

Mise au point 2.2 (*suite*) **Page 124**

10. a)
- Le côté ① est associé à « Chaque millier de dollars investis en publicité permet de vendre au plus 1200 unités ».
- Le côté ② est associé à « L'investissement en publicité est d'au plus 60 k$ ».
- Le côté ③ est associé à « Chaque millier de dollars investis en publicité permet de vendre au moins 600 unités ».
- Le côté ④ est associé à « L'investissement en publicité est d'au moins 30 k$ ».

b) Fonction à optimiser : $P = 6y - x$, où P représente le profit (en k$), y, les ventes (en milliers d'unités), et x, l'investissement en publicité (en k$).

1) Le point D. **2)** Le point D, pour un profit maximal de 248 000 $.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Le prix de vente pourrait être de 11 $.

Mise au point 2.2 (*suite*) **Page 125**

11. a) Le point A. Les coefficients a et b dans la règle étant positifs, x_1 étant inférieure à x_2 et à x_3 et y_1 étant inférieure à y_2 et à y_3, l'expression $ax_1 + by_1$ est nécessairement inférieure à $ax_2 + by_2$ et à $ax_3 + by_3$.

b) Non. Lorsqu'on compare la valeur de la fonction évaluée au point C avec celle évaluée au point B, on sait que le terme ax augmente (car l'abscisse du point C est supérieure à l'abscisse du point B) et que le terme by diminue (car l'ordonnée du point C est inférieure à l'ordonnée du point B). Ne connaissant pas l'ampleur de l'augmentation et celle de la diminution, on ne peut pas déduire lequel de ces points a des coordonnées qui engendrent une valeur maximale.

12. a) x : temps consacré à l'entraînement cardiovasculaire (en min)
y : temps consacré à l'entraînement musculaire (en min)

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$x \geq \frac{2}{3}(x + y)$
$y \geq 15$
$x + y \leq 90$

Fonction à optimiser : $z = 10x + 6y$, où z est le nombre de calories brûlées.

Plusieurs réponses possibles. Exemple : Cette athlète devrait faire 75 min d'entraînement cardiovasculaire et 15 min d'entraînement musculaire.

b) $t = x + y$, où t est la durée totale de l'entraînement (en min).

c) La région F.

d) Système d'inéquations : $x \geq 0$
$x \geq \frac{2}{3}(x + y)$
$y \geq 15$
$x + y \leq 90$
$10x + 6y \geq 700$

Plusieurs réponses possibles. Exemple : Cette athlète pourrait faire 60 min d'entraînement cardiovasculaire et 20 min d'entraînement musculaire.

SECTION 2.3 Optimisation à l'aide de la programmation linéaire

Problème

Page 126

x : longueur du tube (en cm)
y : diamètre du tube (en cm)

Contraintes : $x \geq 2{,}4$
$y \geq 0$
$x \leq 5{,}2$
$y \geq 0{,}1x$
$y \leq 0{,}25x$

Objectif : Chercher le tube le plus court tel que $8x - 40y = 15$.

Le tube doit avoir une longueur de 3,75 cm et un diamètre de 0,375 cm.

Activité 1

Page 127

a. 1) Ensemble des couples (altitude, résistance de l'air) qui engendrent une consommation de 17,7 L/km de kérosène.
2) Ensemble des couples (altitude, résistance de l'air) qui engendrent une consommation de 18,5 L/km de kérosène.
3) Ensemble des couples (altitude, résistance de l'air) qui engendrent une consommation de 19,3 L/km de kérosène.
4) Ensemble des couples (altitude, résistance de l'air) qui engendrent une consommation de 20,1 L/km de kérosène.

b. C'est l'ensemble des couples (altitude, résistance de l'air) qui engendrent une consommation de 19,3 L/km de kérosène tout en respectant les contraintes.

c. $-\frac{2}{45}$

d. Elle augmente.

e. 1) Non, car la droite d_1 n'a aucun point en commun avec le polygone de contraintes.
2) Non, car la droite d_4 n'a aucun point en commun avec le polygone de contraintes.

f.

Sommet	$0{,}32x + 7{,}2y$	C
A(8,5, 2,185)	**$0{,}32 \times 8{,}5 + 7{,}2 \times 2{,}185$**	**18,452**
B(8,5, 2,375)	**$0{,}32 \times 8{,}5 + 7{,}2 \times 2{,}375$**	**19,82**
C(9, 2,25)	**$0{,}32 \times 9 + 7{,}2 \times 2{,}25$**	**19,08**
D(9, 2,09)	**$0{,}32 \times 9 + 7{,}2 \times 2{,}09$**	**17,928**

Activité 1 (*suite*)

Page 128

g. **1)** B(8,5, 2,375) **2)** D(9, 2,09)

h.

Consommation de kérosène (L/km)	$C = 0{,}95x + 5y$	$y = \frac{C}{5} - 0{,}19x$
19	$19 = 0{,}95x + 5y$	$d_5 : y = \mathbf{3{,}8 - 0{,}19x}$
19,3	**$19{,}3 = 0{,}95x + 5y$**	$d_6 : y = \mathbf{3{,}86 - 0{,}19x}$
19,6	**$19{,}6 = 0{,}95x + 5y$**	$d_7 : y = \mathbf{3{,}92 - 0{,}19x}$
20	**$20 = 0{,}95x + 5y$**	$d_8 : y = \mathbf{4 - 0{,}19x}$

i. B(8,5, 2,375)

j. Sur le côté AD.

k. **1)** Ce point correspond à un sommet du polygone de contraintes.
2) Ces points sont situés sur un côté du polygone de contraintes.

Technomath

Page 129

a. (2, 4), (6, 7) et (8,2).

b. **1)** $z = x + 2y$ **2)** −0,5 **3)** (6, 7) **4)** (2, 4)

c. *Plusieurs réponses possibles.* Il faut que B = 0,4A. Par exemple, on peut saisir A = 5 et B = 2.

d. **1)** (6, 7) **2)** (2, 4)

Mise au point 2.3

Page 132

1. a) **1)** C(3, 3) **2)** A(5, 9)
b) **1)** B(20, 40) **2)** C(28, 12)
c) **1)** Tous les points situés sur le côté AB. **2)** C(18, 10)
d) **1)** D(40, 30) **2)** Tous les points situés sur le côté BC.

2. a) Le sommet B. **b)** Le sommet B.

Mise au point 2.3 (*suite*)

Page 133

3. a) 1 : C(6, 9) ; 2 : B(2, 5) **b)** 1 : 39 ; 2 : −10

4. a) **1)** 32 (point E) **2)** −48 (point B) **b)** **1)** 25 (point C) **2)** 7 (point F)
c) **1)** 174 (point D) **2)** 6 (point G) **d)** **1)** −2,8 (point G) **2)** −19,2 (point D)

5. a) (17, 3) **b)** (80, 30) **c)** (0,9, 0,8) **d)** $\left(\frac{20}{73}, -\frac{317}{73}\right)$

Mise au point 2.3 (*suite*)

Page 134

6. a) (2,5, 2,5) **b)** (7,5, 20)

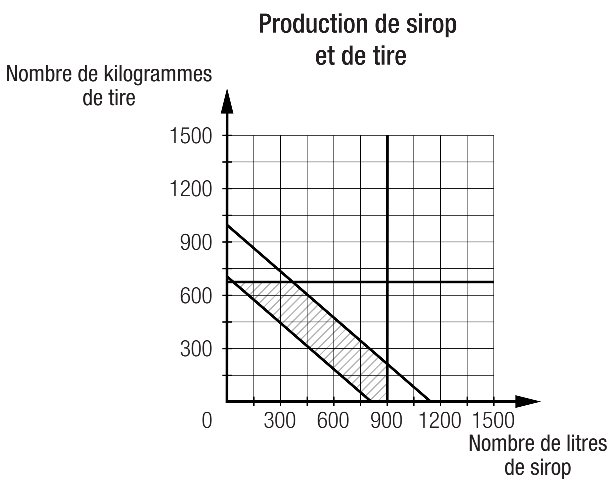
7. a) (3, 6) **b)** (2, 5)

8. a) x : nombre de litres de sirop y : nombre de kilogrammes de tire

b) $z = 3x + 8y$

c) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$35x + 40y \geq 28\ 000$
$35x + 40y \leq 40\ 000$
$x \leq 900$
$y \leq 675$

d)



e) Cette acéricultrice doit produire 371,43 L de sirop et 675 kg de tire.

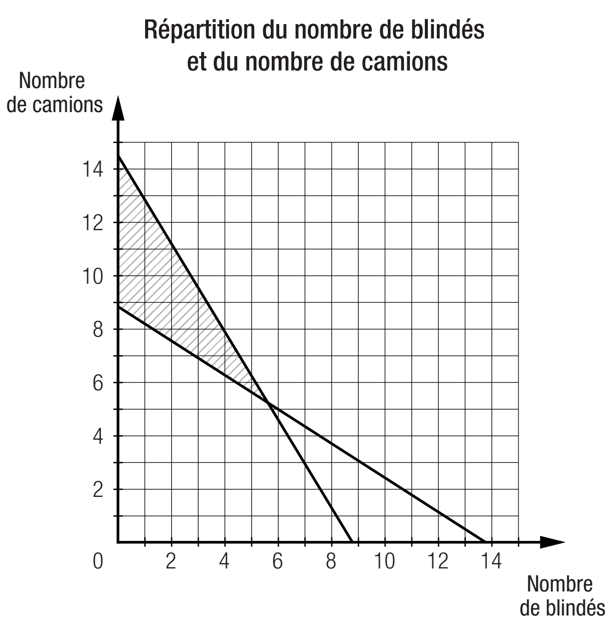
f) Elle peut escompter un profit d'environ 6514,29 $.

Mise au point 2.3 (*suite*) **Page 135**

9. a) Oui si a et b sont négatifs, car lorsque x et y diminuent, la fonction à optimiser devient de moins en moins négative, jusqu'à atteindre un maximum. Non si a et b sont positifs, car les termes ax et by sont positifs et peuvent croître indéfiniment.

b) Non, car seulement un des deux termes ax et by est positif et peut croître indéfiniment.

10. a)



b) $z = 20x + 12y$, où z est le nombre de soldats déplacés.

c) Car on ne peut utiliser qu'un nombre entier de véhicules pour les déplacements.

d) Deux couples-solutions. Les couples (1, 13) et (4, 8).

e) 176 soldats.

f) 1 blindé et 13 camions.

11. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $z = y - 3x$ **b)** $z = y - \frac{4x}{3}$

Mise au point 2.3 (*suite*)

12. x : nombre de vis fabriquées dans chaque atelier
y : nombre de boulons fabriqués dans chaque atelier

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 4{,}5y \leq 10\,800$
$6x + 4y \leq 13\,200$

Fonction à optimiser : $P = 2(0{,}2x + 0{,}15y)$, où P représente les profits (en \$).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 2400), (1080, 1680), (2200, 0)

Cette entreprise doit produire 2160 vis et 3360 boulons pour réaliser un profit maximal de 936 $.

13. a) x : nombre de superordinateurs du modèle A
y : nombre de superordinateurs du modèle B
Système d'inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$
$20x + 24y \leq 800$
$5x + 10y \leq 240$
Fonction à optimiser : $V = 40x + 60y$, où V est la vitesse de calcul.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 24), (28, 10), (40, 0)
Ce département de recherche devrait se procurer 28 ordinateurs du modèle A et 10 ordinateurs du modèle B afin de maximiser la vitesse de calcul, soit 1720 téraflops.

b) Système d'inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$
$40x + 60y \leq 480$
$5x + 10y \leq 240$
Fonction à optimiser : $D = 20x + 24y$, où D représente les dépenses.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 8), (0, 24), (48, 0), (12, 0)
Ce département devrait se procurer aucun ordinateur du modèle A et 8 ordinateurs du modèle B afin de minimiser ses dépenses, soit 192 M$.

Mise au point 2.3 (*suite*)

14. a) 1) 14 mg du médicament A et 21 mg du médicament B.
Système d'inéquations : $x \geq 5$, $y \geq 8$
$x \leq 15$, $y \leq 25$
$x + y \leq 35$
$x \leq 0{,}4(x + y)$
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes :
(5, 25), (5, 8), (10, 25), (14, 21), $\left(\frac{16}{3}, 8\right)$

2) 0,952

b) 1) 5 comprimés du médicament A et 4 comprimés du médicament B. **2)** 0,881 25

15. La température devrait être de 303 K et la pression, de 93,93 kPa.

Système d'inéquations : $T \geq 288$
$T \leq 303$
$P \geq 90$
$P \leq 105$
$P \geq 0{,}31T$
$P \leq 0{,}35T$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (288, 90), (288, 100,8), ($\approx$ 290,32, 90), (300, 105), (303, 93,93), (303, 105)

Chronique du passé

Page 139

1. a) 2500 fantassins et 1000 artilleurs.
x : nombre de fantassins
y : nombre d'artilleurs
Système d'inéquations : $x \geq 2000$, $y \geq 1000$
$y \leq x$
$x + y \geq 3500$
$x + y \leq 5000$
Fonction à optimiser : $T = \frac{6}{125}x + \frac{12}{125}y$, où T est le temps (en h).
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (2500, 2500), (4000, 1000), (2500, 1000), (2000, 1500), (2000, 2000)

b) En 9 jours. **c)** 15 jours. **d)** 2500 fantassins et 2500 artilleurs.

2. a) $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. **b) 1)** (0, 750, 375) **2)** (0, 0, 750) **3)** (375, 0, 375)

Le monde du travail

Page 141

1. $x \geq 36$, $x \leq 38$, $y \geq 0$ et $y \leq 0{,}2$.

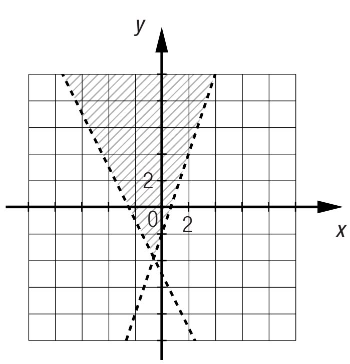
2. **Traitements suggérés par le système expert**

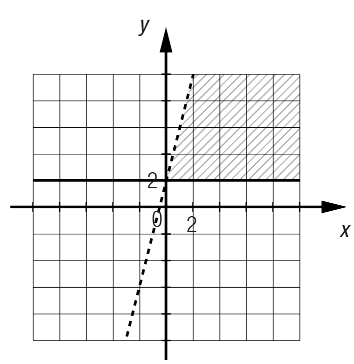
	Dose quotidienne de médicament A (mg)	Dose quotidienne de médicament B (mg)	Suivi médical
a)	60,284	99,5	Hospitalisation recommandée
b)	20,325	23,35	Consultation dans 48 h
c)	Aucun traitement	Aucun traitement	Consultation dans 13 jours

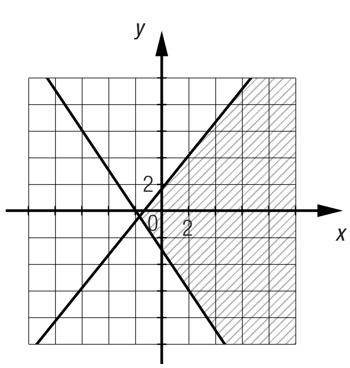
3. a) $0{,}45 \times 39 + 5{,}5 \times 0{,}7 = 21{,}4$ mg **b)** $0{,}5 \times 40 + 7{,}2 \times 0{,}9 = 26{,}48$ mg
c) $3 \times 41 - 12{,}5 \times 1 = 110{,}5$ mg

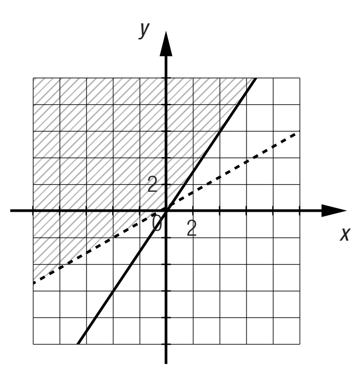
Vue d'ensemble

Page 142

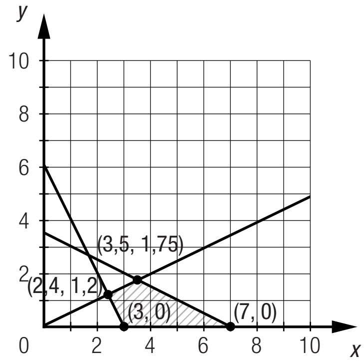
1. a)


b)


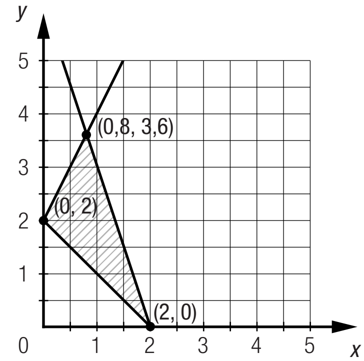
c)


d)


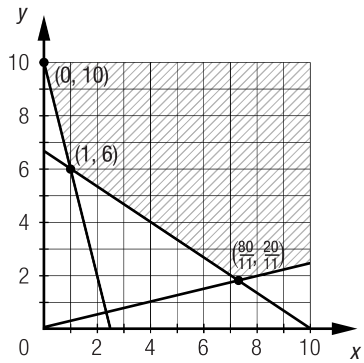
2. a)



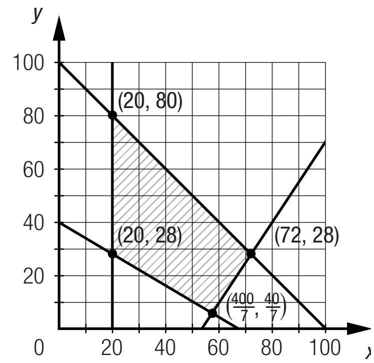
b)



c)



d)



3. a) 1) $x - y \leq {}^-2$, $y \leq {}^-2x + 20$, $4y \geq x - 4$ et $x + 2y > 10$. **2)** $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **3)** C(6, 8) et $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

b) 1) $3x - y > 0$, $y \leq 18$, $y < {}^-x + 30$, ${}^-2x + y \geq {}^-24$ et $x + 6y \geq 38$. **2)** D(14, 4) **3)** D(14, 4)

4. a) A(⁻1, ⁻6) et C(3, 4). **b)** A(⁻1, ⁻6) et E(1, ⁻16). **c)** A(⁻1, ⁻6)

Vue d'ensemble (*suite*)

5. a) 1) x : nombre de chaises
y : nombre de tabourets
$x \geq 150$, $y \geq 100$, $x \geq 2y$ et $x + y \leq 1000$.

2) $z = 20x + 12y$, où z représente le profit (en $).

b) 1) x : nombre d'employés à temps partiel
y : nombre d'employés à temps plein
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $14x + 30y \geq 400$ et $x + y \leq 14$.

2) $z = 12x + 14y$, où z représente les dépenses (en $).

6. a) 1) B(6, 9) **2)** 24
b) 1) D(8, 1) **2)** 26
c) 1) B(6, 9) **2)** 18,45
d) 1) C(8, 7) **2)** 24,2

7.

	①	②	③
Système d'inéquations traduisant des contraintes	$y \leq {}^-x + 15$ $y \leq 2x - 6$ ${}^-x + 3y \geq {}^-60$	$x \geq 0$ $x \geq 0$ $y \leq 15$ $x \leq 14$ $y \leq 2x + 4$	$y \geq {}^-x - 2$ $y \leq x + 4$ $y \leq {}^-3x + 8$
Règle de la fonction à optimiser	$z = 0{,}5x + 2y$	$z = y - 3x$	$z = {}^-10x - 14y$
Objectif visé	Maximiser	Minimiser	Maximiser
Couple-solution	**(7, 8)**	**(14, 0)**	**(5, ⁻7)**
Valeur optimale	**19,5**	**⁻42**	**48**

Vue d'ensemble (*suite*)

8. a) Le graphique 2.

b) Le couple (5, 7) est exclu de l'ensemble-solution, car il ne respecte pas la contrainte « se procurer moins de 12 machines ».

c) **1)** 6 machines A et 5 machines B. **2)** 89 pièces/min.

9. 65 cubes (35 cubes en métal et 30 cubes en bois).
x : nombre de cubes en métal
y : nombre de cubes en bois
Système d'inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$
$50x + 30y \leq 2650$
$0{,}008x + 0{,}024y \leq 1$
Fonction à optimiser : $N = x + y$, où N représente le nombre total de cubes.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), $\left(0, \frac{125}{3}\right)$, (35, 30), (53, 0)

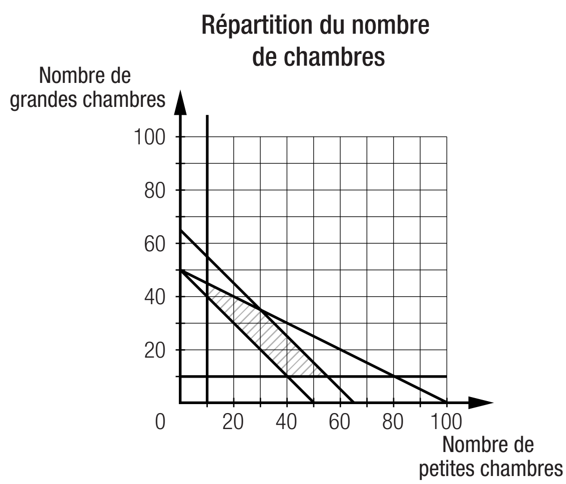
Vue d'ensemble (*suite*)

10. a) x : nombre de petites chambres
y : nombre de grandes chambres

b) $z = 10\,500x + 11\,550y$, où z est le profit annuel (en \$).

c) $x \geq 10$, $y \geq 10$, $x + y \leq 65$, $3x + 6y \leq 300$ et $x + y \geq 50$.

d)



e) 30 petites chambres et 35 grandes chambres.

f) Un profit annuel maximal de 719 250 \$.

11. a) 22 trains de modèle A et 10 trains de modèle B.
x : nombre de trains A
y : nombre de trains B
Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 32$
$50x + 60y \leq 1700$
Fonction à optimiser : $N = 280x + 300y$, où N représente le nombre total de passagers.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, $\approx$ 28,33), (22, 10), (32, 0)

b) 10 trains de modèle A et 22 trains de modèle B.
Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 32$
$280x + 300y \geq 9400$
Fonction à optimiser : $C = 50x + 60y$, où C représente le coût du transport.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : $\left(0, \frac{94}{3}\right)$, (0, 32), (10, 22)

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 146

12. a) $z = 358\,000x + 378\,000y$, où z est la quantité de kérosène (en L), x, le nombre d'avions de modèle A, et y, le nombre d'avions de modèle B.

b) La compagnie doit acheter 3 avions de modèle A et 10 avions de modèle B.

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$365x + 445y \geq 5545$
$145x + 225y \leq 2685$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (3, 10), $\left(\frac{1109}{73}, 0\right)$, $\left(\frac{537}{29}, 0\right)$

c) 1) 2685 M$ **2)** 5545 places. **3)** 4 854 000 L de kérosène.

13. a) z_1 : ($\approx$ 2,5, $\approx$ 2,3) z_2 : (–3, $\approx$ 0,5) ou (3, $\approx$ 0,5). **b)** z_1 : ($\approx$ –0,8, $\approx$ –3,3) z_2 : (0, –4)

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 147

14. a) 1) Le point A$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, 1\right)$. **2)** Le point C$\left(1, \frac{2}{\pi}\right)$.

b) 1) Le cylindre doit avoir une hauteur de 1 m et un rayon de $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ m.

2) Le cylindre doit avoir une hauteur de $\frac{2}{\pi}$ m et un rayon de 1 m.

15. Les dimensions de l'écran sans la bordure doivent être de 24 dm sur 13,5 dm.

x : base de l'écran (en dm)
y : hauteur de l'écran (en dm)

Système d'inéquations : $x \geq 24$
$x \leq 35$
$y \geq 0$
$\frac{x}{y} \leq \frac{16}{9}$
$\frac{x}{y} \geq \frac{4}{3}$

Fonction à optimiser : $P = 3x + 4y + 12$, où P représente la quantité de plastique (en dm^2).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (24, 13,5), (24, 18), (35, 19,6875), (35, 26,25)

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 148

16. a) 32 500 $ **b)** 2800 boîtes.

c) 30 structures en aluminium et 70 structures en acier.

17. a) Le matériau doit être composé d'au moins 20 % d'aluminium. Il doit être composé d'au moins 30 % de fibres de verre, mais pas plus de 70 %. Il doit y avoir au maximum 10 % de plus d'aluminium que de fibres de verre dans le matériau. La somme du pourcentage d'aluminium et du pourcentage de fibres de verre ne dépasse pas 100 %.

b) 1) Le matériau doit être composé de 30 % d'aluminium et de 70 % de fibres de verre pour une masse volumique de 2,63 g/cm^3.

2) Le matériau doit être composé de 20 % d'aluminium et de 30 % de fibres de verre pour une rigidité de 34,6 GPa.

3) La rigidité maximale du matériau est environ de 64,12 GPa pour une masse volumique de 2,39 g/cm^3.

4) La masse volumique minimale du matériau est environ de 1,81 g/cm^3 pour une rigidité de 48,3 GPa.

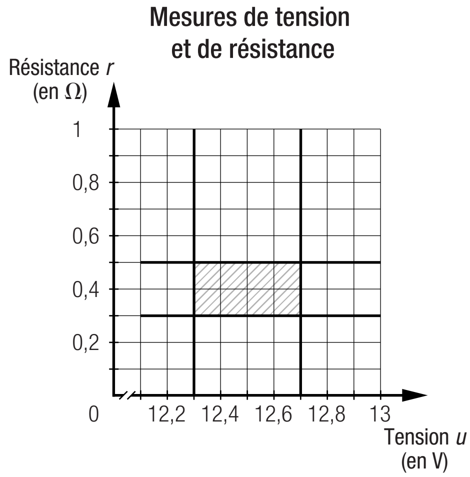
c) 1) 69,90 GPa **2)** 2,63 g/cm^3

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 149

18. a) $u \geq 12{,}3$, $u \leq 12{,}7$, $r \geq 0{,}3$ et $r \leq 0{,}5$.

b)



c) L'incertitude sur la puissance restante du circuit est de 3,5 W.

19. a) Le profit maximal est de 4480 $.

x : nombre de pièces de format A
y : nombre de pièces de format B

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$150x + 190y \geq 9800$
$150x + 190y \leq 13\,600$
$13x + 22y \leq 1400$

Fonction à optimiser : $P = 47x + 65y$, où P est le profit (en $).

Dans le polygone de contraintes, c'est le couple (40, 40) qui maximise les profits.

b) Cette entreprise doit utiliser 66 pièces de format A et aucune pièce de format B.

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$150x + 190y \geq 9800$
$150x + 190y \leq 13\,600$
$47x + 65y \geq 3000$

Fonction à optimiser : $M = 13x + 22y$, où M représente les pertes de matières premières (en cm^3).

Dans le polygone de contraintes, c'est le couple (66, 0) qui minimise les pertes de matières premières.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 150

20. La marge de manœuvre de l'entreprise est de 1,60 $ (le prix de vente minimal peut être de 1,90 $, alors que le prix de vente maximal peut être de 3,50 $).

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 20$
$y \leq 25$
$x \geq y + 5$
$x \leq y + 7$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (25, 20), (27, 20), (30, 25), (32, 25)

21. a) $B\left(500, \frac{16\,000}{9}\right)$, $C\left(\frac{3500}{3}, \frac{4000}{3}\right)$

b) Les coordonnées de ces points ne sont pas toutes entières.

c) Cette entreprise doit produire quotidiennement 1167 cartouches de 8 mL et 1333 cartouches de 14 mL.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 151

22. a) 90 enfants et 60 adultes.

Système d'inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$

$x + y \leq 150$

$x \leq 90$

$\frac{y}{x} \geq \frac{1}{2}$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 150), (90, 45), (90, 60)

b) 13 sauveteurs.

23. a) $E_r \geq 0$ L'énergie des réactifs est supérieure ou égale à 0.

$E_p \geq 0$ L'énergie des produits est supérieure ou égale à 0.

$E_p - E_r < 0$ L'énergie des réactifs soustraite de l'énergie des produits est inférieure à 0.

$E_r - E_p < 300$ L'énergie des produits soustraite de l'énergie des réactifs est inférieure à 300.

$\frac{E_r}{E_p} \leq 3$ Le quotient de l'énergie des réactifs par l'énergie des produits est inférieur ou égal à 3.

b) E_r

c) Non, car le polygone de contraintes est non borné.

24. a) $(0, b), \left(\frac{f - be}{d + ae}, \frac{af - abe}{d + ae} + b\right)$ et $\left(\frac{f - be}{d + ce}, \frac{cf - bce}{d + ce} + b\right)$.

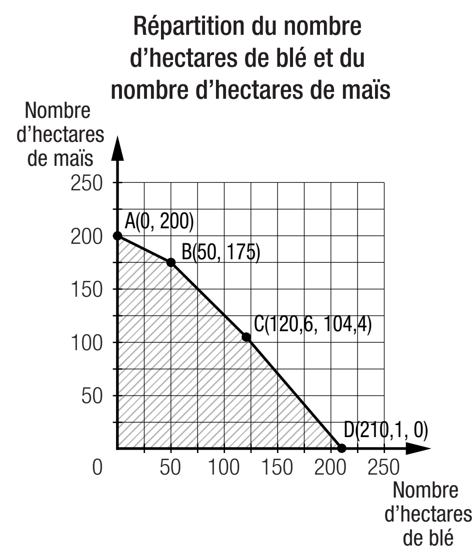
b) Le seul sommet faisant partie de la région-solution est (0, b).

Banque de problèmes

Page 152

1. Soit *x*, le nombre d'hectares à ensemencer avec du blé et *y*, le nombre d'hectares à ensemencer avec du maïs.

- Écrire le système d'inéquations qui traduit les contraintes du problème.
  $x \geq 0$
  $y \geq 0$
  $119x + 102y \leq 25\ 000$
  $31x + 62y \leq 12\ 400$
  $x + y \leq 225$
- Déterminer la fonction à optimiser.
  $z = 106,25x + 153,75y$, où z est le profit (en $).
- Représenter le polygone de contraintes.
- Déterminer les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.
  A(0, 200)
  B(50, 175)
  C(≈ 120,6, ≈ 104,4)
  D(≈ 210,1, 0)
  E(0, 0)



- Évaluer la fonction à optimiser en chacun des sommets.
- Formuler la réponse.
  L'agriculteur devra ensemencer 50 hectares avec du blé et 175 hectares avec du maïs.

Sommet	Profit
A(0, 200)	30 750 $
B(50, 175)	32 218,75 $
C(≈ 120,6, ≈ 104,4)	≈ 28 866,42 $
D(≈ 210,1, 0)	≈ 22 321,40 $

2. • Déterminer le ou les points dont les coordonnées maximisent le profit.

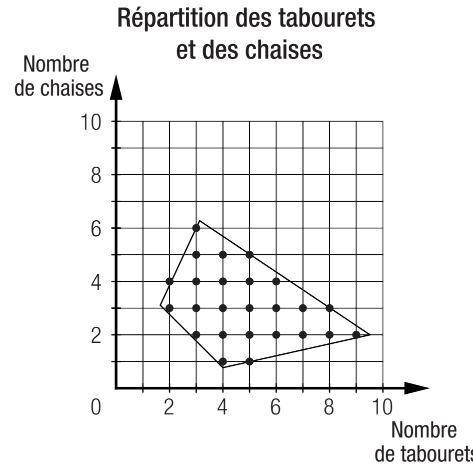
Si x et y représentent respectivement le nombre de tabourets produits et le nombre de chaises produites, la règle de la fonction à optimiser est $P = 60x + 90y$, où P représente le profit (en \$). Les couples (5, 5) et (8, 3) maximisent le profit. Ce maximum est de 750 \$.

• Parmi ces deux couples, déterminer celui qui minimise le temps de travail.

Couple	Temps de travail
(5, 5)	$5 \times 5 + 9 \times 5 = 70$ h
(8, 3)	$5 \times 8 + 9 \times 3 = 67$ h

Le couple (8, 3) minimise le temps de travail.

• Conclure : La répartition la plus avantageuse pour cette menuisière est de produire 8 tabourets et 3 chaises.



Banque de problèmes (*suite*)

Page 153

3. Les coordonnées du sommet B engendrent une plus petite valeur de la fonction g que les coordonnées du sommet A si $cx_1 - dy_1 > cx_2 - dy_2$. On peut manipuler cette inéquation de la façon suivante.

$$\begin{aligned} cx_1 - dy_1 &> cx_2 - dy_2 \\ cx_1 - dy_1 - (cx_2 - dy_2) &> 0 \\ cx_1 - cx_2 - dy_1 + dy_2 &> 0 \\ cx_1 - cx_2 &> dy_1 - dy_2 \\ c(x_1 - x_2) &> d(y_1 - y_2) \\ c &< d\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ \frac{c}{d} &< \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Puisque la pente de la droite baladeuse associée à la fonction g est de $\frac{c}{d}$, on en déduit que, pour que les coordonnées du sommet B engendrent une plus petite valeur de la fonction g que les coordonnées du sommet A, la pente du segment AB doit être supérieure à la pente de la droite baladeuse.

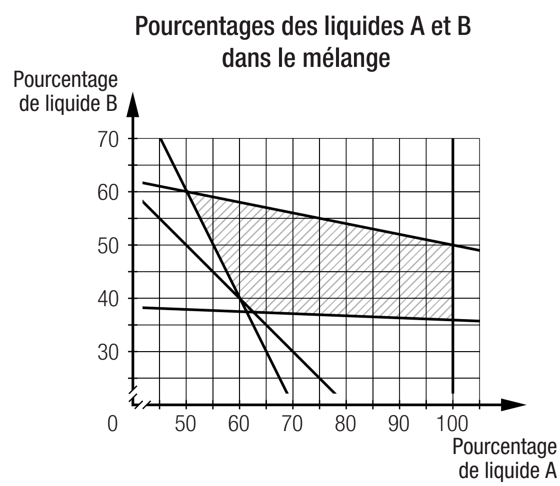
4. • Établir le système d'inéquations et la règle de la fonction à optimiser, et représenter le polygone de contraintes.

x : pourcentage de liquide A
y : pourcentage de liquide B

Système d'inéquations :

$$\begin{aligned} &x \geq 0 \\ &x \leq 100 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 100 \\ &\frac{0{,}2x}{100} + \frac{y}{100} \leq 0{,}7 \\ &\frac{40x}{100} + \frac{20y}{100} \geq 32 \\ &\frac{x}{100} + \frac{25y}{100} \geq 10 \\ &x + y = 100 \end{aligned}$$

Fonction à optimiser : $I = \frac{23x}{100} + \frac{12y}{100}$, où I est la concentration en impuretés (en g/L).



La région-solution correspond au segment de la droite d'équation $x + y = 100$ situé à l'intérieur du polygone de contraintes.

• Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $x + y = 100$ et des côtés du polygone de contraintes : (60, 40) et (62,5, 37,5).

- Évaluer la fonction à optimiser pour ces deux couples.

Couple	Concentration en impuretés
(60, 40)	$0{,}23 \times 60 + 0{,}12 \times 40 = 18{,}6$ g/L
(62,5, 37,5)	$0{,}23 \times 62{,}5 + 0{,}12 \times 37{,}5 = 18{,}875$ g/L

- Conclure : Il faut mélanger les liquides A et B dans un rapport de 60 : 40.

Banque de problèmes (*suite*)

5. Pour la journée de lundi

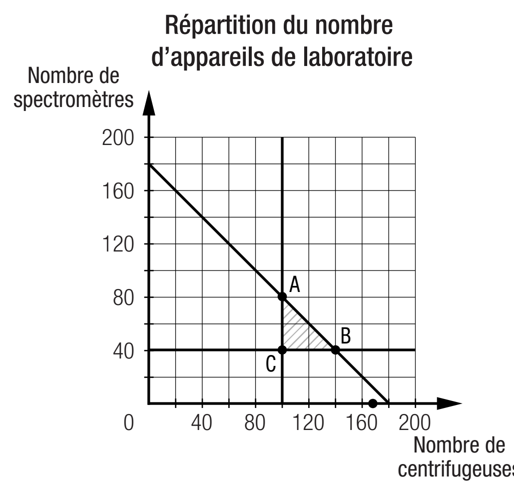
La masse totale des marchandises à transporter doit être d'au moins 134 kg, mais de moins de 380 kg. La masse maximale d'eau à transporter ne doit pas excéder 240 kg. La masse minimale de nourriture doit être de 44 kg et la masse maximale, de 176 kg. Finalement, la masse d'eau à transporter doit être au moins égale à la masse de nourriture.
Les bidons d'eau doivent avoir une masse de 30 kg alors que les boîtes de nourriture doivent avoir une masse de 22 kg.

Pour la journée de mardi

La masse totale des marchandises à transporter doit être de 400 kg au maximum. La masse des médicaments doit être d'au moins 40 kg. La quantité d'équipement est d'au moins 100 kg. La masse de l'équipement est supérieure au double de la masse des médicaments.
Les sacs de médicaments doivent avoir une masse de 20 kg alors que les caissons d'équipement doivent avoir une masse de 25 kg.

6. Soit *x,* le nombre de centrifugeuses et *y,* le nombre de spectromètres.

- Établir les contraintes sous la forme d'un système d'inéquations.
  $x \geq 100$
  $y \geq 40$
  $x + y \leq 180$
- Établir la fonction qui permet de calculer les revenus *r* (en $).
  $r = 4000x + 5250y$
- Tracer le polygone de contraintes.
- Déterminer les coordonnées des sommets du polygone.
  A(100, 80) B(140, 40) C(100, 40)
- Trouver, parmi les sommets du polygone, celui qui maximise les revenus.



Sommet	Revenus
A(100, 80)	820 000 $
B(140, 40)	770 000 $
C(100, 40)	610 000 $

- Établir la règle qui permet de calculer les profits.
  $p = (4000 - c)x + (5250 - s)y$

  Étant donné que les revenus sont maximaux en A, pour que les profits y soient supérieurs par rapport au point B, on doit avoir :
  $100(4000 - c) + 80(5250 - s) > 140(4000 - c) + 40(5250 - s)$
- Résoudre cette inéquation pour démontrer que $c > s - 1250$.

$$\begin{aligned} 80(5250 - s) - 40(5250 - s) &> 140(4000 - c) - 100(4000 - c) \\ 40(5250 - s) &> 40(4000 - c) \\ (5250 - s) &> (4000 - c) \\ 1250 - s &> {}^{-}c \\ c &> s - 1250 \end{aligned}$$

Donc, pour que les revenus et les profits soient maximaux en A, on doit avoir $c > s - 1250$.

7. • Il faut minimiser la fonction qui permet de calculer le coût moyen z de production d'un article. La règle de cette fonction est $z = \frac{ax + by}{x + y}$, où x est le nombre d'articles A et y, le nombre d'articles B.

• Pour une valeur constante C de ce coût, l'ensemble des couples (x, y) qui engendrent ce coût vérifie l'équation $\frac{ax + by}{x + y} = \mathrm{C}$. En manipulant cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} ax + by &= \mathrm{C}x + \mathrm{C}y \\ ax - \mathrm{C}x &= {}^{-}by + \mathrm{C}y \\ x(a - \mathrm{C}) &= y({}^{-}b + \mathrm{C}) \\ y &= {}^{-}\frac{a - \mathrm{C}}{b - \mathrm{C}}x \end{aligned}$$

• La pente du segment qui relie l'origine à un point dont les coordonnées satisfont cette équation est de ${}^{-}\frac{a - \mathrm{C}}{b - \mathrm{C}}$. Plus la valeur de C est faible, plus la valeur de cette expression se rapproche de ${}^{-}\frac{a}{b}$. On en conclut que le point du polygone de contraintes dont les coordonnées engendrent la plus petite valeur de C sera celui qui forme avec l'origine un segment dont la pente sera le plus près de ${}^{-}\frac{a}{b}$.

8. *Exemple de démarche possible :*

• Si x représente la somme investie dans le portefeuille A (en k$) et y, la somme investie dans le portefeuille B (en k$), les contraintes peuvent être traduites par le système d'inéquations suivant.

$x \leq 120$
$y \leq 100$
$x + y \geq 140$
$x + y \leq 180$

• La fonction qui permet de calculer le risque total r d'investissement (x, y) est :
$r = 0{,}3\frac{25}{100}x + 0{,}1\frac{15}{100}y$ ou $r = 0{,}075x + 0{,}015y$.

• La fonction qui permet de calculer le profit total p d'un investissement (x, y) est :
$p = 0{,}4\frac{10}{100}x + 0{,}2\frac{15}{100}x + 0{,}1\frac{20}{100}x + 0{,}5\frac{10}{100}y + 0{,}1\frac{15}{100}y + 0{,}3\frac{20}{100}y$ ou $p = 0{,}09x + 0{,}125y$.

Le graphique suivant montre le polygone de contraintes ainsi que deux droites baladeuses associées au risque et au profit.

Le graphique permet de déduire que :
• les coordonnées (40, 100) minimisent le risque ;
• les coordonnées (80, 100) maximisent le profit.

La somme à investir dans le portefeuille A est donc la moyenne de 40 k$ et de 80 k$, soit 60 k$, et la somme à investir dans le portefeuille B est de 100 k$.